

TD

Exercice 1 :

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de densité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 2 - x & \text{si } x \in [1, 2] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition F de X . Tracer son graphe ainsi que celui de f .
2. Déterminer la médiane de X .
3. Calculer son espérance et sa variance.
4. Calculer $P(|X - 1| < 1/2)$.

Exercice 2 :

On considère une variable aléatoire X réelle dont la densité de probabilité est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x^{-2} & \text{si } x \in [1, 10] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de K la fonction f est bien une densité de probabilité?
2. Déterminer l'espérance et la variance.
3. Déterminer la fonction de répartition.
4. Calculer $P(X > 3)$ et $P(X > 2)$.

Exercice 3 :

Soit X une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{1}{4} * a * x + b & \text{si } -2 < x < -1 \\ c * x + \frac{2}{3} & \text{si } -1 < x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

1. Déterminer a , b et c pour que F soit bien une fonction de répartition.
2. Calculer $P(-3/2 < X < 0)$.
3. Déterminer la médiane et l'espérance de X .

Exercice 7 :

Soit X une variable aléatoire de loi normale d'espérance -2 et de variance 4 .

Calculer les probabilités suivantes :

$$P(0 < X < 1), \quad P(0 < X < 0.5), \quad P(-1 < X < 1), \quad P(-2 < X < -1), \\ P(-0.7 < X < -0.3), \quad P(1 < X < 2).$$

Exercice 8 :

Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

Calculer pour chacune des probabilités ci-après, la valeur du paramètre a :

$$P(0 < X < a) = 95\%, \quad P(-a < X < a) = 96\%, \quad P(a < X) = 5\%, \quad P(a < |X|) = 2\%.$$

Exercice 11 Une usine utilise une machine automatique pour remplir des flacons contenant un certain produit en poudre. Par suite de variations aléatoires dans le mécanisme, le poids de poudre par flacon est une v.a. de loi normale de moyenne m et d'écart-type 1,1 mg. Les flacons sont vendus comme contenant 100 mg de produit.

1. La machine est réglée sur $m = 101,2$ mg. Quelle est la probabilité que le poids de produit dans un flacon soit inférieur au poids annoncé de 100 mg ?
2. Sur quelle valeur de m faut-il régler la machine pour qu'au plus 4% des flacons aient un poids inférieur au poids annoncé de 100 mg ?